

Introduction aux séries temporelles

Examen du lundi 6 janvier 2025

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (10 points) On considère l'équation ARMA(3,1)

$$X_t = Z_t - 2Z_{t-1} + \frac{7}{2}X_{t-1} - 2X_{t-2} - 2X_{t-3}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où (Z_t) est un bruit blanc centré de variance 1.

1. Montrer que cette équation possède une unique solution stationnaire X . Est-elle causale ? (indication: penser à -2 comme racine évidente d'un certain polynôme...)
2. Expliquer pourquoi X possède une densité spectrale f_X et calculer explicitement $f_X(0)$.
3. Montrer que X vérifie également l'équation AR(2) bien posée

$$X_t = Z_t + \frac{3}{2}X_{t-1} + X_{t-2}.$$

4.

5. On pose $\tilde{Z}_t = \frac{1}{2}Z_t$ et on considère l'équation AR(2)

$$\tilde{X}_t = \tilde{Z}_t + \frac{1}{4}\tilde{X}_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Vérifier que cette équation admet une unique solution stationnaire $\tilde{X}$ qui est un processus causal de $\tilde{Z}$ et vérifie $\gamma_{\tilde{X}} = \gamma_X$.

Exercice 2 (11 points) On considère un modèle AR(p), $p \in \mathbb{N}^*$,

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k}, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où (Z_t) est un bruit blanc centré et de variance $\sigma^2 > 0$ et où le polynôme $\Phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k z^k$ n'a aucune racine de module inférieur ou égal à 1.

1. Après avoir expliqué pourquoi le modèle est bien posé et causal, calculer $\text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))$.
2. Rappeler l'équation de Yule-Walker pour le calcul des coefficients de $\text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))$ en fonction de X_{t-k} , $k = 1, \dots, p$, et expliquer pourquoi cette équation possède une unique solution.
3. En déduire qu'on peut exprimer les coefficients ϕ_k , $k = 1, \dots, p$, en fonction des coefficients d'autocovariance $\gamma_X(k)$, $k = 0, \dots, p$.

A partir de maintenant, on suppose que $p = 2$.

4. Montrer que

$$\phi_2 = \frac{\gamma_X(2) - \phi_1 \gamma_X(1)}{\gamma_X(0)}.$$

5. On suppose qu'on observe $X_1, \dots, X_n$ avec $n \geq 3$. Donner des estimateurs $\hat{\gamma}_n(h)$ de $\gamma_X(h)$ pour $h = 0, \dots, 2$ et rappeler sous quelle condition ces estimateurs convergent, et en quel sens cette convergence a lieu.
6. On suppose ϕ_1 connu. Proposer un estimateur $\hat{\phi}_n$ pour ϕ_2 en fonction de $\hat{\gamma}_n(h)$ pour $h = 0, \dots, 2$ et montrer sa convergence.

Introduction to Time Series

Exam - January 6, 2024

Length 2 hours - Documents et calculators are not authorized

Exercise 1 (10 points) We consider the ARMA(3,1) equation

$$X_t = Z_t - 2Z_{t-1} + \frac{7}{2}X_{t-1} - 2X_{t-2} - 2X_{t-3}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

where (Z_t) is a white noise centered and of variance 1.

1. Show that this equation has a unique stationary solution X . Is it causal?
(hint: think of -2 as the obvious root of a certain polynomial...)
2. Explain why X has a spectral density f_X and explicitly compute $f_X(0)$.
3. Show that X also satisfies the well-posed AR(2) equation

$$X_t = Z_t + \frac{3}{2}X_{t-1} + 2X_{t-2}.$$

4. For all $p \geq 2$ determine $\text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))$ as well as $\|X_t - \text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))\|_{L^2}$ (carefully justify the result).
5. We set $\tilde{Z}_t = \frac{1}{2}Z_t$ and we consider the equation AR(2)

$$\tilde{X}_t = \tilde{Z}_t + \frac{1}{4}\tilde{X}_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Check that this equation admits a unique stationary solution $\tilde{X}$ which is a causal process of $\tilde{Z}$ and verifies $\gamma_{\tilde{X}} = \gamma_X$.

Exercise 2 (11 points) We consider an AR(p) model, $p \in \mathbb{N}^*$,

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k}$$

where (Z_t) is a centered white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and where the polynomial $\Phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k z^k$ has no root with modulus less than or equal to 1.

1. After explaining why the model is well-posed and causal, compute $\text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))$.
2. Recall the Yule-Walker equation for calculating the coefficients of $\text{proj}(X_t, \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}))$ as a function of X_{t-k} , $k = 1, \dots, p$, and explain why this equation has a unique solution.
3. Deduce that one can express the coefficients ϕ_k , $k = 1, \dots, p$, as a function of the autocovariance coefficients $\gamma_X(k)$, $k = 0, \dots, p$.

From now on, we assume that $p = 2$.

4. Show that

$$\phi_2 = \frac{\gamma_X(2) - \phi_1 \gamma_X(1)}{\gamma_X(0)}.$$

5. We suppose that we observe $X_1, \dots, X_n$ with $n \geq 3$. Give estimators $\hat{\gamma}_n(h)$ of $\gamma_X(h)$ for $h = 0, \dots, 2$ and recall under what condition these estimators converge, and in what sense this convergence takes place.
6. We assume ϕ_1 known. Propose an estimator $\hat{\phi}_n$ for ϕ_2 as a function of $\hat{\gamma}_n(h)$ for $h = 0, \dots, 2$ and show its convergence.